

CEBİRSEL İFADELER VE ÖZDEŞLİKLER

Cebirsel İfade

- İçinde en az bir değişken bulunan ve işlem içeren ifadelere **cebirsel ifade** denir.
- Cebirsel ifadelerde bilinmeyen sayıyı temsil eden harf ya da sembole **değişken** denir.
- Bir cebirsel ifadede + (toplama) ya da – (çıkarma) işaretleri ile birbirinden ayrılan ifadelere **terim** denir.
- Değişkenlerle çarpım durumunda olan sayısal çarpanlara **katsayı** denir.
- Değişkeni olmayan terime **sabit terim** denir.
- Değişkenleri aynı olan terimlerin, kuvvetleri de aynı ise bu terimlere **benzer terimler** denir.



DİKKAT

Sabit terim, aynı zamanda bir katsayıdır.

Cebirsel İfadeyi Farklı Biçimde Yazma

$$24x^2$$

Alanı $24x^2$ olan bir dikdörtgensel bölgenin kenar uzunluklarının $24x^2$ nin çarpanları olması gerekir.

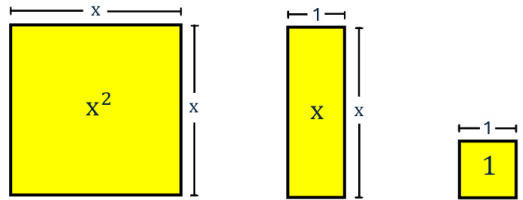
Bu çarpanların bazıları:

- $x \cdot 24x$
- $2x \cdot 12x$
- $3x \cdot 8x$
- $4x \cdot 6x$
- $12 \cdot 2x^2$ şeklindedir.

$24x^2$ nin burada belirtilenlerin dışında başka çarpanları da yazılabilir. Ayrıca $24x^2$ cebirsel ifadesi toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri kullanılarak farklı şekillerde yazılabilir.

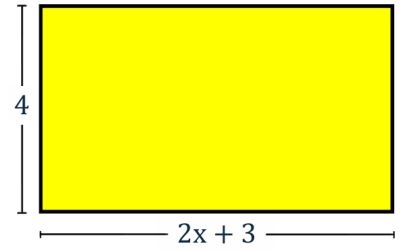
Cebirsel İfadelerde Çarpma İşlemi

Cebirsel ifadelerle yapılan işlemleri anlamlandırmak için aşağıdaki cebir karoları kullanılabilir.



Kenar uzunlukları görseldeki gibi verilen cebir karolarının alanlarının büyüklüğü şekillerin içine yazılmıştır.

Kenar uzunlukları 4 metre ve $(2x + 3)$ metre olan dikdörtgen şeklindeki bir tahtanın bir yüzeyi boyanacaktır. Boyanacak yüzeyin alanını temsil eden cebirsel ifadeyi bulalım.

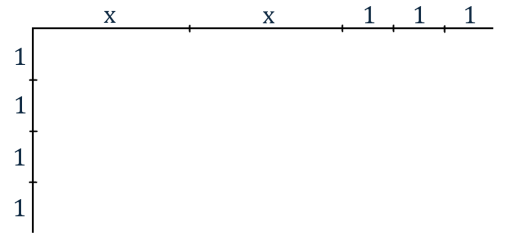


Çözüm:

1. Yol:

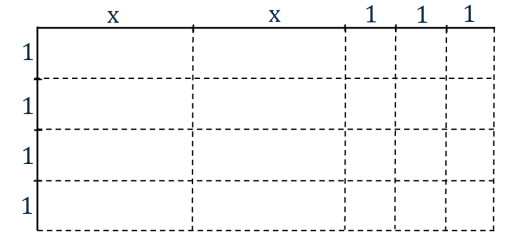
Dikdörtgen şeklindeki tahtanın bir yüzünün alanını temsil eden cebirsel ifadeyi, cebir karolarını kullanarak bulalım.

Dikdörtgen şeklindeki tahtanın kenar uzunlukları olan $2x + 3 = x + x + 1 + 1 + 1$ ve $4 = 1 + 1 + 1 + 1$ olarak yazılabilir. Buna göre dikdörtgen şeklindeki tahtanın kenarları Şekil-1'deki gibi işaretlenebilir.



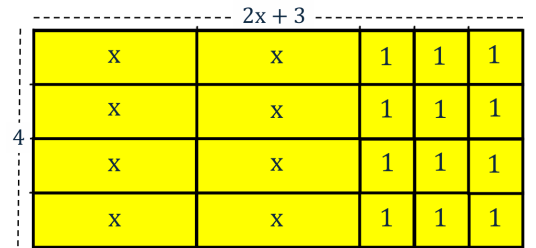
Şekil-1

İşaretlenen bu noktalardan Şekil-2'deki gibi çizimler yapılırsa dikdörtgen şeklindeki tahta dikdörtgensel bölgelere ayrılmış olur.



Şekil-2

Dolayısıyla her bir dikdörtgensel bölge, Şekil-3'te gösterildiği gibi bir cebir karosuna karşılık gelmiş olur.



Şekil-3

Bu cebir karolarının alanlarının toplamı da dikdörtgen şeklindeki tahtanın bir yüzünün alanını verir.

Yani dikdörtgen şeklindeki tahtanın bir yüzünün alanı:

$$4 \cdot (2x + 3) = 8x + 12 \text{ olur.}$$

2. Yol:

Dikdörtgen şeklindeki tahtanın bir yüzünün alanını bulmak için şimdi de çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanalım.

$$\begin{aligned} 4 \cdot (2x + 3) &= 4 \cdot 2x + 4 \cdot 3 \\ &= 8x + 12 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Özdeşlikler

$$3 \cdot (x + 2)$$

$$2 \cdot (x + 3) + x$$

$$x = 1 \text{ ise } = 3 \cdot (1 + 2) = 3 \cdot 3 = 9$$

$$= 2 \cdot (1 + 3) + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 8 + 1 = 9$$

$$x = 2 \text{ ise } = 3 \cdot (2 + 2) = 3 \cdot 4 = 12$$

$$= 2 \cdot (2 + 3) + 2 = 2 \cdot 5 + 2 = 10 + 2 = 12$$

$$x = -4 \text{ ise } = 3 \cdot (-4 + 2) = 3 \cdot (-2) = -6$$

$$= 2 \cdot (-4 + 3) + (-4) = 2 \cdot (-1) + (-4) = -2 + (-4) = -6$$

▪
▪
▪

Yani x yerine yazılacak her sayı için $3 \cdot (x + 2) = 2 \cdot (x + 3) + x$ eşitliği sağlanmaktadır.

İçindeki değişkenlere verilen bütün gerçekte sayı değerleri için doğru olan eşitliklere **özdeşlik**, bazı gerçekte sayı değerleri için doğru olan eşitliklere de **denklem** denir.

Bazı Özdeşlikler:

İki Kare Farkı Özdeşliği: $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$

İki Terimin Toplamının Karesi Özdeşliği: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

İki Terimin Farkının Karesi Özdeşliği: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Cebirsel İfadeleri Çarpanlara Ayırma

Alanı $6x+18y$ metrekare olan dikdörtgenel bölge şeklindeki bahçesinin etrafına çit yaptırmak isteyen Ahmet Bey'in, bahçesinin kenar uzunluklarını bilmeye ihtiyacı vardır. Sizce Ahmet Bey'in bahçesinin kenar uzunlukları neler olabilir?

$$6x + 18y$$

Bahçenin kenar uzunluklarının neler olabileceği, $(6x + 18y)$ 'nin çarpanlarına bakılarak belirlenebilir.

$(6x + 18y)$ ifadesi,

$$6x + 18y = 1 \cdot (6x + 18y)$$

$$6x + 18y = 2 \cdot (3x + 9y)$$

$$6x + 18y = 3 \cdot (2x + 6y)$$

$$6x + 18y = 6 \cdot (x + 3y) \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

Bu gösterimlerle $6x + 18y$ ifadesini, çarpanlarının çarpımı biçiminde yazdığımızda ifadeyi çarpanlarına ayırmış ve bahçenin kenar uzunluklarını bulmuş oluruz.

Bir cebirsel ifadeyi çarpanlarının çarpımı biçiminde yazmaya, o cebirsel ifadenin **çarpanlarına ayrılması** denir.

Çarpanlara Ayırma Yöntemleri:

- Ortak Çarpan Parantezine Alarak Çarpanlara Ayırma
- Tam Kare Özdeşliklerini Kullanarak Çarpanlara Ayırma
- İki Kare Farkı Özdeşliğini Kullanarak Çarpanlara Ayırma

a. Ortak Çarpan Parantezine Alarak Çarpanlara Ayırma

$$3x^2 + 6x$$

Alanı $3x^2 + 6x$ olan yandaki dikdörtgensel bölgenin kenar uzunluklarının neler olabileceğini $3x^2 + 6x$ cebirsel ifadesini çarpanlarına ayırarak belirleyelim.

$3x^2 + 6x$ cebirsel ifadesinin her bir teriminin çarpanları yazılırsa,

$$3x^2 + 6x = 3 \cdot x \cdot (x + 2)$$

$3 \cdot x \cdot x$ $2 \cdot 3 \cdot x$

$3 \cdot x$ 'in her iki terimde de ortak olduğu görülür. Bu $3 \cdot x$ ortak çarpan olarak parantezin önüne, geriye kalan çarpanlar da parantezin içine yazılırsa, $3x^2 + 6x$ cebirsel ifadesinin çarpanları 3 , x ve $(x + 2)$ olur.

b. Tam Kare Özdeşliklerini Kullanarak Çarpanlara Ayırma

$$x^2 + 6x + 9$$

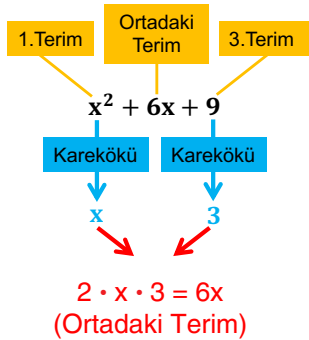
Alanı $x^2 + 6x + 9$ olan yandaki karesel bölgenin kenar uzunluklarının neler olabileceğini $x^2 + 6x + 9$ cebirsel ifadesini çarpanlarına ayırarak belirleyelim.



DİKKAT

- İki Terimin Toplamının Karesi Özdeşliği: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 - İki Terimin Farkının Karesi Özdeşliği: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Bu iki özdeşlik **tam kare özdeşliği** olarak adlandırılır.

Şimdi $x^2 + 6x + 9$ üç terimli cebirsel ifadesinin tam kare bir ifade olup olmadığını inceleyelim.



Yandaki şemada da görüldüğü üzere, 1.terimin karekökü ile 3.terimin karekökünün çarpımının iki katı $6x$ 'i, yani ortadaki terimi vermektedir. Bu, $x^2 + 6x + 9$ cebirsel ifadesinin tam kare bir ifade olduğunu gösterir.

Ayrıca ortadaki terimin işareti **+** (pozitif) olduğu için bu ifade,

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 = (x + 3) \cdot (x + 3) \text{ olarak yazılabilir.}$$

Dolayısıyla $x^2 + 6x + 9$ ifadesinin çarpanı $(x + 3)$ olur.

c. İki Kare Farkı Özdeşliğini Kullanarak Çarpanlara Ayırma

$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$ eşitliği **iki kare farkı özdeşliği** olarak adlandırılır.

Bu özdeşliğe göre $a^2 - b^2$ ifadesi, $(a - b) \cdot (a + b)$ şeklinde yazıldığında çarpanlarına ayrılmış olur.

Yani, $a^2 - b^2 = \underbrace{(a - b)}_{\text{Çarpan}} \cdot \underbrace{(a + b)}_{\text{Çarpan}}$

şeklinde yazılırsa çarpanlar: $(a - b)$ ve $(a + b)$ olur.